**Группы: ФВ, СД, НХТ**

**Курс 1**

**Дисциплина: математика и информатика**

**Преподаватель: Жилкина Елена Владимировна**

**Тема 13 Геометрический смысл производной**

Вспомним [определение производной](https://ege-ok.ru/2012/01/27/geometricheskiy-smyisl-proizvodnoy-fizicheskiy-smyisl-proizvodnoy/):

Производной функции называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:



Исходя из этого определения, рассмотрим, каким образом производная функции  связана с графиком этой функции.

Геометрический смысл производной.

Тангенс угла наклона касательной (угловой коэффициент наклона касательной), проведенной к графику функции   в точке    равен производной функции  в этой точке:



Заметим, что угол  - это угол между прямой и положительным направлением оси ОХ:



Уравнение касательной к графику функции   в точке  имеет вид:



В этом уравнении:

 - абсцисса точки касания,

 - значение функции  в точке касания,

 - значение производной функции  в точке касания.

Приведем несколько примеров решения задач из Открытого банка заданий для подготовки к ЕГЭ по математике, в которых используется знание геометрического смысла производной.

Пример 1. Задание В8 (№ 27504) На рисунке изображены график функции   и касательная к нему в точке с абcцисcой  . Найдите значение производной функции  в точке  .



Значение производной функции  в точке  равно тангенсу угла между касательной и положительным направлением оси ОХ. Чтобы его найти, выделим прямоугольный треугольник, гипотенуза которого лежит на касательной, а катеты параллельны осям координат. Обозначим точки с целыми координатами буквами  А и В - эти точки выделены на касательной:



Проведем через точку А прямую параллельно оси ОХ, а через точку В - параллельно оси OY. Получим прямоугольный треугольник ABC:



Угол А  треугольника  АВС равен углу между касательной и положительным направлением оси ОХ.

Тангенс острого угла прямоугольного треугольника равен отношению противолежащего катета к прилежащему.



Длины катетов считаем по количеству клеточек.

Ответ: 0,25

Пример 2. Задание В8 (№ 27506) На рисунке изображены график функции   и касательная к нему в точке с абцисоой  . Найдите значение производной функции  в точке .



Эта задача очень похожа на предыдущую, за исключением того, что здесь касательная  наклонена влево, и угол между касательной и положительным направлением оси ОХ расположен так:



Построим, как предыдущей задаче, прямоугольный треугольник АВС:



Угол А треугольника ABC и угол  - смежные, то есть их сумма равна 180 градусов. Значит,



Запомните, если прямая наклонена влево, то коэффициент наклона прямой отрицателен.

Ответ: -0,25

Пример 3. Задание В8 (№ 40129)  На рисунке изображен график функции . Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсцссой 8. Найдите значение производной функции в точке .



Соединим  отрезком точку начала координат с точкой касания:



Производная функции в точке касания равна тангенсу угла  между касательной и положительным направлением оси ОХ:



Чтобы найти тангенс , рассмотрим прямоугольный треугольник АОВ:





Ответ: 1,25

**Задания для самостоятельной работы:**

**1.Читать и конспектировать п. 48, с.251-255**

**2. Решить №857, с.255 (учебник Алгебра и начала анализа для 10-11 кл, Алимов, Колягин, Просвещение 2012).**

**Группы: ФВ, СД, НХТ**

**Курс 1**

**Дисциплина: математика и информатика**

**Преподаватель: Жилкина Елена Владимировна**

**Тема 14: Применение производной к исследованию функций**

***Возрастание и убывание функции. Экстремумы функции. Применение производной к построению графиков функций.***

## Возрастание и убывание функции на интервале.

**Определение возрастающей функции.**

Функция *y=f(x)* возрастает на интервале *X*, если для любых  и  выполняется неравенство . Другими словами – большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

**Определение убывающей функции.**

Функция *y=f(x)* убывает на интервале *X*, если для любых  и  выполняется неравенство . Другими словами – большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.



## Точки экстремума, экстремумы функции.

Точку  называют **точкой максимума** функции *y=f(x)*, если для всех *x* из ее окрестности справедливо неравенство . Значение функции в точке максимума называют **максимумом функции** и обозначают .

Точку  называют **точкой минимума** функции *y=f(x)*, если для всех *x* из ее окрестности справедливо неравенство . Значение функции в точке минимума называют **минимумом функции** и обозначают .

Под окрестностью точки  понимают интервал , где  - достаточно малое положительное число.

Точки минимума и максимума называют **точками экстремума**, а значения функции, соответствующие точкам экстремума, называют **экстремумами функции**.



Не путайте экстремумы функции с наибольшим и наименьшим значением функции.



На первом рисунке наибольшее значение функции на отрезке *[a;b]* достигается в точке максимума и равно максимуму функции, а на втором рисунке – наибольшее значение функции достигается в точке *x=b*, которая не является точкой максимума.

## Достаточные условия возрастания и убывания функции.

На основании достаточных условий (признаков) возрастания и убывания функции находятся промежутки возрастания и убывания функции.

Вот формулировки признаков возрастания и убывания функции на интервале:

* если производная функции *y=f(x)* положительна для любого *x* из интервала *X*, то функция возрастает на *X*;
* если производная функции *y=f(x)* отрицательна для любого *x* из интервала *X*, то функция убывает на *X*.

Таким образом, чтобы определить промежутки возрастания и убывания функции необходимо:

* найти область определения функции;
* найти производную функции;
* решить неравенства  и  на области определения;
* к полученным промежуткам добавить граничные точки, в которых функция определена и непрерывна.

Рассмотрим пример нахождения промежутков возрастания и убывания функции для разъяснения алгоритма.

*Пример.*

Найти промежутки возрастания и убывания функции .

*Решение.*

На первом шаге нужно [найти область определения функции](http://www.cleverstudents.ru/functions/finding_domain_of_function.html). В нашем примере выражение в знаменателе не должно обращаться в ноль, следовательно, .

Переходим к нахождению производной функции:


Для определения промежутков возрастания и убывания функции по достаточному признаку решаем неравенства  и  на области определения. Воспользуемся обобщением метода интервалов. Единственным действительным корнем числителя является *x = 2*, а знаменатель обращается в ноль при *x=0*. Эти точки разбивают область определения на интервалы, в которых производная функции сохраняет знак. Отметим эти точки на числовой прямой. Плюсами и минусами условно обозначим интервалы, на которых производная положительна или отрицательна. Стрелочки снизу схематично показывают возрастание или убывание функции на соответствующем интервале.


Таким образом,  и .

В точке *x=2* функция определена и непрерывна, поэтому ее следует добавить и к промежутку возрастания и к промежутку убывания. В точке *x=0* функция не определена, поэтому эту точку не включаем в искомые интервалы.

Приводим график функции для сопоставления с ним полученных результатов.



*Ответ:*

функция возрастает при , убывает на интервале *(0;2]*.

## Достаточные условия экстремума функции.

Для нахождения максимумов и минимумов функции можно пользоваться любым из трех признаков экстремума, конечно, если функция удовлетворяет их условиям. Самым распространенным и удобным является первый из них.

### Первое достаточное условие экстремума.

Пусть функция *y=f(x)* дифференцируема в -окрестности точки , а в самой точке  непрерывна.

Тогда

* если  при  и  при , то  - точка максимума;
* если  при  и  при , то  - точка минимума.

Другими словами:

* если в точке  функция непрерывна и в ней производная меняет знак с плюса на минус, то  - точка максимума;
* если в точке  функция непрерывна и в ней производная меняет знак с минуса на плюс, то  - точка минимума.

**Алгоритм нахождения точек экстремума по первому признаку экстремума функции.**

* Находим область определения функции.
* Находим производную функции на области определения.
* Определяем нули числителя, нули знаменателя производной и точки области определения, в которых производная не существует (все перечисленные точки называют *точками возможного экстремума*, проходя через эти точки, производная как раз может изменять свой знак).
* Эти точки разбивают область определения функции на промежутки, в которых производная сохраняет знак. Определяем знаки производной на каждом из интервалов (например, вычисляя значение производной функции в любой точке отдельно взятого интервала).
* Выбираем точки, в которых функция непрерывна и, проходя через которые, производная меняет знак - они и являются точками экстремума.

**Задания для самостоятельной работы:**

1.Читать и конспектировать п. 51, с.271-276

2. Решить №926, с.276 (учебник Алгебра и начала анализа для 10-11 кл, Алимов, Колягин, Просвещение 2012).