**Лекции 9.10**

**08.11.21, 15.11.21**

**1 курс**

**Показательными** называются уравнения с показательной функцией **f(x) = aх**. Другими словами, неизвестная переменная в них может содержаться как в основании степени, так и в ее показателе. Простейшее уравнение такого вида: **aх = b**, где **a > 0, a ≠ 1**.

С точки зрения геометрии показательной функцией называют такую: **y = ax**, где **a > 0** и **a ≠ 1**. У нее есть одно важное для решения показательных уравнений свойство — это монотонность. При **a > 1** такая функция непрерывно возрастает, а при **a < 1** (но больше 0) — непрерывно убывает. Это хорошо видно на рисунке ниже.



**Важно знать**

Показательная функция не может быть отрицательным числом, т. е. выражение **у = ax** при **а ≤ 0** корней не имеет.

Свойства степеней

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|

|  |  |
| --- | --- |
| am x an | am+n |
| am:an | am-n |
| (a x b)n | an x bn |
| (a : b)n | an : bn |
| (an)m | an x m |
| a-n | 1/an |
| (a/b)-n | (b/a)n |
| n√a | a1/n |

 |

[Записаться →](https://webinars.skysmart.ru/authority?utm_source=articles&utm_content=skysmart-webinar-wrapper-widget)

**Методы решения показательных уравнений**

Самые короткие и простые показательные уравнения решаются с помощью элементарной математики. Например:

4х = 64.

Требуется найти, в какую степень нужно возвести 4, чтобы получить 64.

4 × 4 × 4 = 64

43 = 64

Х = 3

Но как решать показательные уравнения вот такого вида: 3√128= 42х? Нужно немного повозиться с преобразованием этого выражения. Например, сделать так, чтобы либо основания, либо степенные показатели стали одинаковы. Для этого мы можем разложить 128 и 4. Вы ведь заметили, что у них есть общий множитель? Правильно, это 2.

3√128= 42х

3√27= (22)2x

27/3 = 24х

Теперь в нашем уравнении появились одинаковые основания, а значит, мы можем приравнять и степени.

4х = 7/3

х = 7/12

В данном случае мы используем один из алгоритмов решения показательных уравнений — привели обе части равенства к одинаковым основаниям. Дальше рассмотрим и другие методы.

**Приведение к одинаковому основанию**

Весомую часть уравнений вида ах = b (при а и b 0) можно решить, превратив **b** в определенную степень числа **a**. Именно это мы сделали в примере выше, получив одинаковые основания. Главная трудность в том, чтобы найти у этих чисел общий множитель.

|  |  |
| --- | --- |
|

|  |
| --- |
| Если у нас есть одинаковые основания, но разные показатели степени, то при умножении чисел степени складываются, а при делении — вычитаются. |

 |

Пример 1

Рассмотрим еще одно показательное уравнение с корнем.

(1/642)-х = √1/8

Мы знаем, что у 64 и 8 есть общий множитель — это 2. Попробуем использовать это, и тогда 642 = 212, а 8 = 23.

(1/212)-х = √1/23

1/2-12х = 1/22/3

(1/2)-12х = (1/2)3/2

-12х = 3/2

х = -1/8

Пример 2

В этом примере показательного уравнения нужно будет отдельно преобразовать каждую составляющую.

(0,5)х2 × 4х+1 = 64-1

Найдем общее основание показательных функций:

0,5 = 1/2 = 2-1

4 = 22

64 = 26

В результате у нас получается:

(2-1)х2 × (22)х+1 = (26)-1

2-х2 × 22х+2 = 2-6

2-х2+2х+2 = 2-6

-х2 + 2х + 2 = -6

х2- 2х - 8 = 0

Здесь у нас будет два корня: -2 и 4.

[Записаться →](https://webinars.skysmart.ru/authority?utm_source=articles&utm_content=skysmart-webinar-wrapper-widget)

**Приведение к одинаковой степени**

Не все показательные уравнения с разными основаниями можно решить предыдущим способом. Иногда проще преобразовать не основания, а показатели степени. Правда, пользоваться этим методом есть смысл только в том случае, когда мы имеем дело с умножением или делением.

|  |  |
| --- | --- |
|

|  |
| --- |
| При умножении чисел с разными основаниями, но одинаковыми степенными показателями можно перемножить только основания (степень останется прежней): *axbx = (ab)x*. |

 |

Пример

52х-4 = 492-х

Общих множителей у левой и правой части уравнения нет и привести их к одинаковому основанию достаточно трудно. Поэтому стоит поработать с показателями степеней:

52х-4 = 492-х

52х-4 = 74-2х

52х-4 = (1/7)2х-4

352х-4 = 1

2х - 4 = 0

х = 2

Пример 2

2х-2 = 52-х

Нам нужно привести обе части уравнения к одинаковым степенным показателям, и для этого вначале попробуем преобразовать правую часть, используя свойство степенных функций.

2х-2 = 1/5х-2

Теперь умножим обе части на 52-х и придем к уравнению:

2х-2 × 52-х = 1

10х-2 = 1

10х-2 = 100

х - 2 = 0

х = 2

**Замена переменной**

Этот способ решения показательных уравнений понадобится тем, кто не боится по-настоящему трудных задач. Ведь с помощью ввода новой переменной можно упростить даже самое сложное выражение. Его суть проста: мы заменяем «трудную» переменную на более простую и решаем уравнение, а после производим обратную замену. Главное — определить, какую именно переменную стоит заменить.

Пример

4x- 2x+1- 8 = 0

Очевидно, что в этом уравнении показательные функции легко привести к общему основанию: 4х = 22х, а 2х+1 = 2 × 2х.

22х - 2 × 2х - 8 = 0

Что-то напоминает. 🤔 Если бы из этого выражения можно было волшебным образом убрать 2х, получилось бы обычное квадратное уравнение. Поэтому мы обозначим 2х новой переменной — допустим, **y**.

Если 2х = y, получается: у2- 2у - 8 = 0.

У такого уравнения есть два корня: у1 = 4, у2 = -2.

Проведем обратную замену: 2х = 4, 2х = -2.

Но мы знаем, что показательная функция в любом случае не может быть отрицательным числом, а значит, 2х = -2 корней не имеет. Следовательно, 2х = 4.

х = 2.

Пример 2

25х - 6 × 5х + 5 = 0

Если присмотреться к этому выражению, становится понятно, что у него много общего с квадратным уравнением. Введем новую переменную: 5х = у.

у2 - 6у + 5 = 0

Корни такого уравнения: 1 и 5.

Выполним обратную замену:

5х = 1, значит х = 0.

5х = 5, значит х = 1.

Пример 1

3х+1 + 3х - 3х-2 = 35

3х-2(33 + 32 - 1) = 35

3х-2 × 35 = 35

3х-2 = 1

Поскольку 1 равняется любое число в нулевой степени, мы можем записать:

3х-2 = 30

х - 2 = 0

х = 2

Пример 2

5 × 3-3х+1 + 3-3х+2 = 24

Для начала мы попробуем в левой части уравнения получить одинаковую степень: 3-3х+2 = 3-3х+1+1 = 3 × 3-3х+1.

3-3х+1(5+3) = 24

8 × 3-3х+1 = 24

3-3х+1 = 31

-3х + 1 = 1

х = 0

Домашнее задание: записать определения, решенные примеры.